

Corso di Laurea: Fisica
Esame: Termodinamica e Fluidodinamica (scritto e soluzioni)
23 settembre 2019

Esercizio n.1

Un sistema composto da 2 moli di gas perfetto inizialmente ad una pressione di 5 atm ed un volume di 10 l, compie il ciclo composto da:

- trasformazione politropica pV^2 fino alla pressione atmosferica, con una variazione di Entalpia di -5507 J;
- trasformazione adiabatica reversibile fino al volume iniziale;
- il ciclo viene chiuso ponendo il sistema in contatto con il serbatoio alla temperatura iniziale.

Calcolare i calori molari del gas, ed il lavoro totale. Disegnare il grafico del ciclo compiuto dal gas e le temperature minima e massima raggiunte. Calcolare infine la variazione di entropia dell'universo.

Soluzione

L'incognita da trovare in questo caso è c_p , o se vogliamo, $\gamma = c_p/c_V$. Il sistema iniziale è noto, conoscendo il numero di moli, la pressione ed il volume, si ricava immediatamente la temperatura

$$T_A = p_A V_A / nR = 304.6 \text{ K}$$

La prima trasformazione è un'espansione politropica di cui conosciamo il coefficiente $\alpha = 2$ e pertanto possiamo determinare il volume finale

$$p_A V_A^\alpha = p_B V_B^\alpha \rightarrow V_B = V_A \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{1/\alpha} = 2.236 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

e la temperatura

$$T_B = p_B V_B / nR = 136.2 \text{ K}$$

Possiamo a questo punto calcolare c_p che si ricava avendo avuto come input la variazione di Entalpia del sistema durante l'espansione

$$\Delta H = n c_p (T_B - T_A) \rightarrow c_p = \frac{\Delta H}{n(T_B - T_A)} = 16.35 \text{ J/mol/K}$$

ed immediatamente

$$c_V = c_p - R = 8.04 \text{ J/mol/K} \quad \text{da cui si ricava} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} = 2.03$$

pertanto $\gamma > \alpha$ il che significa che la compressione adiabatica risulta maggiormente pendente dell'espansione politropica, rendendo di conseguenza il ciclo "antiorario" e quindi il ciclo è in realtà un frigorifero (o una pompa di calore). Calcoliamo il calore scambiato durante l'espansione politropica; per farlo basta calcolare

$$c_\alpha = c_V + \frac{R}{1 - \alpha} = -0.28 \text{ J/mol/K}$$

(calore molare negativo!) ed utilizzare direttamente la relazione

$$Q_{AB} = nc_{\alpha}(T_B - T_A) = 94.11 \text{ J}$$

Si osserva che in questo caso il sistema assorbe calore e diminuisce la propria temperatura, fenomeno che accade proprio per valori di α compresi tra 1 e γ . La seconda trasformazione è come già detto una compressione adiabatica reversibile fino al volume iniziale, che porta il sistema ad una temperatura superiore a quella iniziale

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \rightarrow T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} = 313.3 \text{ K}$$

In questo caso non vi è calore scambiato. Rimane ora da chiudere il ciclo con una trasformazione isocora irreversibile che riporti il sistema al punto di partenza. Il calore scambiato in questo caso è

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = -138.9 \text{ J}$$

Il ciclo è un frigorifero, nel senso che è antiorario. Il lavoro totale è dato dalla somma dei calori scambiati lungo il ciclo:

$$L = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = -44.82 \text{ J}$$

Infine resta da calcolare la variazione di Entropia dell'Universo, che si fa per la sola trasformazione isocora irreversibile, usando la nota formula

$$\begin{aligned} \Delta S_U &= (\Delta S_{CA})_{amb} + (\Delta S_{CA})_{sis} \\ &= nc_V \frac{T_C - T_A}{T_A} + nc_V \ln \frac{T_A}{T_C} = 0.62 \text{ J/K} \end{aligned}$$

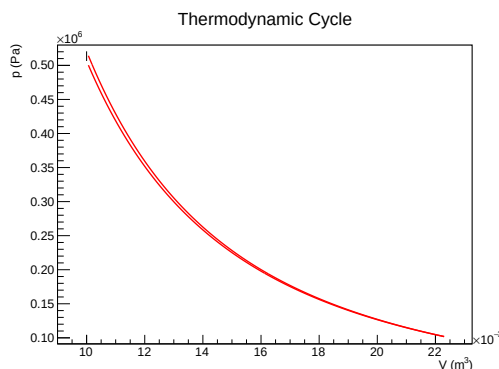


Figura 1: Esercizio 1

Esercizio n.2

Un condizionatore con un coefficiente di prestazione del 30% rispetto a quello di un frigorifero di Carnot, viene utilizzato per mantenere fresca la casa a 24 °C mentre la temperatura all'esterno è di 35 °C. L'insieme di pareti, finestre, soffitto e pavimenti sono termicamente equivalenti ad una parete uniforme, con una superficie di 200 m², composta da uno strato interno di 20 cm di calcestruzzo e da 3 cm di intonaco. Determinare la temperatura tra i due strati di materiale e la potenza elettrica necessaria. Se si vuole dimezzare il costo dell'energia elettrica bisogna intervenire sulle pareti esterne, aggiungendo pannelli di stifferite (il "cappotto", può essere di materiale isolante diverso dalla stifferite). Qual è lo spessore necessario? Calcolare approssimativamente la temperatura che andrebbe tenuta all'interno della casa in assenza di interventi.

La conducibilità termica del calcestruzzo, dell'intonaco e della stifferite è, rispettivamente, 1.3, 0.08 e 0.023 Wm⁻¹K⁻¹, rispettivamente.

Soluzione

Il coefficiente di prestazione di un frigorifero di Carnot è

$$\omega_C = \frac{T_i}{T_e - T_i} = 27.0$$

con T_i la temperatura interna della casa e T_e quella all'esterno. Il coefficiente di prestazione del frigorifero è dato da

$$\omega_{cc} = \frac{Q_i}{-L} = \epsilon \omega_C = \epsilon \frac{T_i}{T_e - T_i} = 8.10$$

con Q_i il calore assorbito dal condizionatore (uguale al calore Q che fluisce in casa attraverso le pareti), $-L = W \Delta t$ (W la potenza assorbita dalla rete elettrica) ed ϵ l'efficienza relativa del frigorifero rispetto a quello di Carnot. Dalla legge di Fourier si ricava

$$Q = \frac{k}{d} S (T_e - T_i) \Delta t$$

con k la conducibilità termica, d lo spessore ed S la superficie della parete. Definiamo ora per semplicità di calcoli

$$H = \frac{k}{d} [\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}]$$

la "conduttanza unitaria" della parete. Mettendo assieme queste informazioni si ricava

$$-L = W \Delta t = \frac{Q_i}{\omega_{cc}} = H S (T_e - T_i) \Delta t \times \frac{T_e - T_i}{\epsilon T_i}$$

da cui

$$W = \frac{H S}{\epsilon} \times \frac{(T_e - T_i)^2}{T_i}$$

Dobbiamo pertanto calcolare H per ricavarci la potenza elettrica assorbita. Per farlo ricordiamo che il calore che fluisce attraverso la parete deve essere lo stesso anche nel punto di giunzione dei due strati, dove la temperatura T sarà intermedia tra quella esterna ed interna. Le pareti infatti sono dei conduttori e non dei serbatoi di calore. Pertanto partendo dall'espressione della legge di Fourier, risulta

$$H(T_e - T_i) = H_1(T - T_i) = H_2(T_e - T)$$

con H_1 (H_2) la conduttanza della parete di calcestruzzo (intonaco). Dalla seconda uguaglianza si ricava la temperatura T

$$T = \frac{H_1 T_i + H_2 T_e}{H_1 + H_2} = 27.2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

e dalla prima si ottiene l'importante relazione

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}$$

da cui si ricava $H = 1.89 \text{ W/m}^2/\text{K}$. La potenza elettrica assorbita risulta infine

$$W = \frac{HS}{\epsilon} \times \frac{(T_e - T_i)^2}{T_i} = 513 \text{ Watt}$$

per dimezzare il consumo di corrente elettrica bisogna dimezzare la conduttanza della parete, che chiameremo H' , pertanto

$$H' = \frac{H}{2}$$

ma per quanto visto, se aggiungiamo uno strato di materiale la nuova conduttanza rispetto alla precedente è data dalla relazione

$$\frac{1}{H'} = \frac{2}{H} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H_3} \rightarrow H_3 = H$$

con H_3 la conduttanza unitaria della parete di stifferite. Questo ci permette di ricavare

$$d_3 = \frac{k_3}{H_3} = 1.22 \text{ cm}$$

Per ottenere una diminuzione del 50% dei consumi alternativamente bisogna tenere la casa ad una temperatura T'_i più elevata. Facciamo il rapporto tra le due potenze elettriche

$$\frac{W'}{W} = 0.5 = \frac{T_i(T_e - T'_i)^2}{T'_i(T_e - T_i)^2}$$

poiché le temperature vanno calcolate in unità Kelvin, possiamo assumere $T'_i \simeq T_i$ e quindi

$$\frac{T_e - T'_i}{T_e - T_i} = \sqrt{\frac{W'}{W}} = 0.707$$

da cui $T'_i \simeq 27^\circ\text{C}$.

Esercizio n.3

Un recipiente cilindrico è disposto orizzontalmente e contiene un fluido ideale di volume $V = 1 \text{ m}^3$ e densità $\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$. Da un lato del recipiente vi è un pistone libero di scorrere senza attrito e dall'altro vi è un foro, di 5 cm di diametro, molto più piccolo della sezione del recipiente. Sul pistone viene applicata una forza costante che svuota completamente il cilindro, compiendo un lavoro $L = 20 \text{ kJ}$. Determinare il tempo necessario per svuotare il recipiente.

Soluzione

La forza applicata è costante e pertanto lo è anche la pressione esercitata sul pistone. Dobbiamo applicare il teorema di Bernoulli in due punti particolari del sistema, A) all'uscita del foro e B) dentro il recipiente.

$$\frac{\rho v_A^2}{2} + p_{atm} = \frac{\rho v_B^2}{2} + p_{atm} + p_B$$

con v_A e v_B la velocità del fluido in A) e B), rispettivamente, p_{atm} la pressione atmosferica e p_B la pressione aggiuntiva esercitata sul pistone. È evidente

che la pressione esercitata sul pistone è quella atmosferica (che non compie lavoro perché serve solo ad impedire che l'acqua spinga il pistone) più quella aggiuntiva che per l'appunto muove il pistone per svuotare il contenitore, e che è l'unica che compie lavoro. Poiché il foro è molto più piccolo della sezione del cilindro, nell'equazione di Bernoulli il termine cinetico in B) può essere trascurato

$$\frac{\rho v_A^2}{2} \simeq p_B$$

ma $p_B = F/S$ con F la forza applicata ed S la superficie del pistone. Inoltre, essendo la forza costante, il lavoro $L = Fl$ con $l = V/S$ la lunghezza del recipiente da cui $p_B = L/V$, e quindi

$$v_A = \sqrt{\frac{2L}{\rho V}}$$

ed è ovviamente costante. Pertanto la portata volumetrica $q = v_A \times s$ con s la sezione del foro. Ma il tempo di svuotamento non è che $t = V/q$, e sostituendo

$$\sqrt{\frac{2L}{\rho V}} \times \pi \frac{d^2}{4} = \frac{V}{t}$$

da cui alla fine risulta

$$t = \frac{4V}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\rho V}{2L}} = \frac{1}{\pi d^2} \sqrt{\frac{8\rho V^3}{L}} = 80.54 \text{ s}$$