**Corso di Laurea: Fisica**
**Esame: Termodinamica e Fluidodinamica (scritto e soluzioni)**
**23 gennaio 2020**

### Esercizio n.1

Un sistema composto da 2 moli di gas perfetto monoatomico, occupa un volume iniziale di 20 litri e compie il ciclo composto da:
- trasformazione politropica $pV^2$ fino alla pressione atmosferica, con una variazione di Entalpia di -5000 J;
- compressione isoterma reversibile fino al volume iniziale;
- il ciclo viene chiuso ponendo il sistema in contatto con il serbatoio alla temperatura iniziale.

Calcolare il rendimento del ciclo, la variazione di entropia dell'universo ed il rendimento di una macchina di Carnot che operi fra le temperature minima e massima raggiunte dal ciclo.

### Soluzione

Il ciclo si compone di un'espansione politropica, una compressione isoterma ed una isocora irreversibile a chiudere il ciclo, come indicato in fig.1. Non conosciamo lo stato termodinamico iniziale in quanto non sono note né la temperatura $T_A$, né la pressione $p_A$. Per poter risolvere questo esercizio, utilizziamo le equazioni di stato nei punti in $A$ ed in $B$ e le due relazioni indicate nel testo e che mettiamo a sistema:

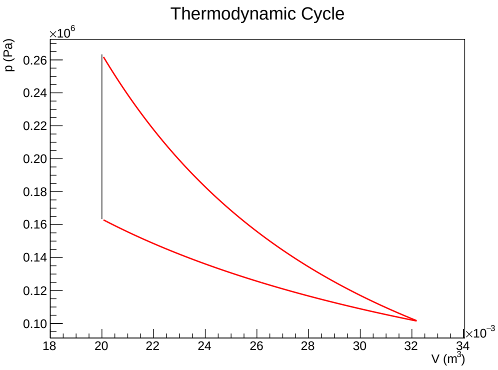

Figura 1: Esercizio 1

$$
\begin{cases}
p_A V_A = nRT_A & \text{EoS} \\
p_B V_B = nRT_B & \text{EoS} \\
p_A V_A^\alpha = p_B V_B^\alpha & \text{politropica} \\
\Delta H = nc_p(T_B - T_A) & \text{variazione di Entalpia}
\end{cases}
$$

Utilizzando l'Equazione di Stato, ed essendo $\alpha = 2$, possiamo riscrivere le equazioni come

$$
\begin{cases}
T_A V_A = T_B \dfrac{nRT_B}{p_B} \\
T_B - T_A = \dfrac{\Delta H}{nc_P}
\end{cases}
$$

con le uniche incognite $T_A$ e $T_B$. Riarrangiamo le equazioni

$$
\begin{cases}
T_A = \dfrac{nRT_B^2}{p_B V_A} \\
T_A = T_B - \dfrac{\Delta H}{nc_P}
\end{cases}
$$

Eliminando $T_A$ si ricava l'equazione di secondo grado con una sola incognita $x = T_B$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con

$$\begin{cases} a = n^2 R c_p \\ b = -n c_p p_B V_A \\ c = p_B V_A \Delta H \end{cases}$$

che pertanto prevede due possibili soluzioni di cui una delle due non fisica (temperatura minore di zero):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow T_B = 196 \text{ K}$$

e conseguentemente $T_A = 317$ K. Ora dobbiamo solo proseguire nei calcoli. Calcoliamo il calore scambiato durante l'espansione politropica. Troviamo

$$c_\alpha = c_V + \frac{R}{1-\alpha} = 4.16 \text{ J/mol/K}$$

da cui si ricava

$$Q_{AB} = n c_\alpha (T_B - T_A) = -1000 \text{ J}$$

La seconda trasformazione è una compressione isoterma per cui

$$Q_{BC} = L_{BC} = nRT_B \log \frac{V_A}{V_B} = -1560 \text{ J}$$

e la terza trasformazione, che chiude il ciclo, è un'isocora irreversibile

$$Q_{CA} = n c_V (T_A - T_B) = 3000 \text{ J}$$

Ricaviamo immediatamente il rendimento

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{Q_{CA}} = 14.7\%$$

mentre l'equivalente rendimento della macchina di Carnot è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 38.0\%$$

Infine resta da calcolare la variazione di Entropia dell'Universo, che si fa per la sola trasformazione isocora irreversibile

$$\begin{aligned} \Delta S_U &= (\Delta S_{CA})_{amb} + (\Delta S_{CA})_{sis} \\ &= \frac{-Q_{CA}}{T_A} + n c_V \ln \frac{T_A}{T_C} = 2.44 \text{ J/K} \end{aligned}$$

**Esercizio n.2**

L'equazione di stato della radiazione di corpo nero è $p = U/3V$ e la sua energia interna è $U = \sigma V T^4$ con $\sigma$ la costante di radiazione. Determinare la funzione Entropia e verificare se viola il Terzo Principio della Termodinamica.

**Soluzione**

Partiamo, come già visto negli approfondimenti *3.5.2 Energia Interna ed Entropia dei Sistemi Idrostatici* dall'espressione del I e II PTD in forma diferenziale $dU = TdS?pdV$ che ci permette di ricavare

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} \quad ; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}$$

e sostituendo con le espressioni date, si ricava

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \left(\frac{\sigma V}{U}\right)^{1/4}$$

e

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{\sigma^{1/4} U^{3/4}}{3V^{3/4}}$$

A questo punto si integrano le due equazioni, la prima rispetto a $U$ e la seconda rispetto a $V$ per ottenere due integrali dell'Entropia

$$S(U, V) = \frac{4\sigma^{1/4} V^{1/4} U^{3/4}}{3} + f(V)$$

e

$$S(U, V) = \frac{4\sigma^{1/4} V^{1/4} U^{3/4}}{3} + g(U)$$

che devono essere uguali, come già visto e pertanto

$$f(V) = g(U) = c$$

con $c$ indipendente da $U$ e da $V$, e quindi

$$S(U, V) = \frac{4\sigma^{1/4} V^{1/4} U^{3/4}}{3} + c$$

Ora dobbiamo verificare se questa equazione soddisfa il Terzo PTD e per farlo dobbiamo prima sostituire l'Energia Interna con la Temperatura nella funzione Entropia

$$S(T, V) = \frac{4}{3}\sigma V^{1/4} T + c$$

e verificare che l'Entropia tende tende ad un valore finito al tendere a zero della temperatura.

$$\lim_{T \to 0} S(T, V) = c$$

e pertanto l'Equazione di Stato della radiazione di corpo nero soddisfa il III PTD.

**Esercizio n.3**

La ciminiera di una fabbrica emette aria calda alla temperatura di 150 $°C$, ad una velocità di 100 km/h, mentre la temperatura esterna è di 10 $°C$. Si faccia l'ipotesi che la base della ciminiera sia aperta e sufficientemente ampia da poter considerare nulla la velocità dell'aria calda alla base. Nell'ipotesi in cui l'aria sia un gas perfetto e che le temperature non cambino con l'altezza, si determini l'altezza della ciminiera. Si valuti l'errore commesso nell'approssimazione di Stevino.

**Soluzione**

*NB: esercizio uguale all'Es.3 del 10 luglio 2015 e dell'11 settembre 2018, con incognite diverse*

Per risolvere questo esercizio dobbiamo ricordare che alla stessa quota la pressione atmosferica è la stessa, come dimostrato dalla legge di Stevino, ma qui dobbiamo modificare la relazione che lega la pressione alla quota, che non può essere lineare, altrimenti come già visto, finiremmo per trovare pressioni minori di zero a circa 10 km di altezza. Detta $x$ l'altezza della ciminiera, possiamo scrivere le equazioni di Bernoulli dentro e fuori dalla ciminiera, ipotizzando che all'esterno della stessa l'aria (considerata un gas perfetto) sia ferma:

$$\begin{cases} p_0 = p_x + \rho_e g x \\ p_0 = p_x + \rho_i g x + \frac{1}{2}\rho_i v_x^2 \end{cases}$$

da cui

$$\rho_e g x = \rho_i g x + \frac{1}{2}\rho_i v_x^2$$

$\rho_e$ e $\rho_i$ sono la densità dell'aria all'esterno ed all'interno della ciminiera, rispettivamente. La soluzione semplice consiste nel considerare le densità dell'aria dipendenti solo dalla temperatura esterna ed interna e non dalla pressione, per cui sono legate tra loro dalla relazione

$$\rho_e T_e = \rho_i T_i$$

e sostituendo nell'equazione sopra scritta, risulta

$$\rho_i \frac{T_i}{T_e} g x = \rho_i g x + \frac{1}{2}\rho_i v_x^2$$

da cui

$$x = \frac{v_x^2}{2g\left(\frac{T_i}{T_e} - 1\right)} = 79.5 \text{ m}$$

avendo posto $\rho_e = 1.27\ \mathrm{kg/m^3}$, e $g = 9.31$ m/s. La pressione al suolo non serve in quanto viene semplificata nei calcoli. Questo calcolo però non tiene conto del fatto che la densità varia anche con la quota oltre che con la temperatura, per cui dobbiamo sostituire

$$p_x = p_0 - \rho g x \quad \text{con} \quad p_x = p_0 \exp\left(-\frac{\rho g x}{p_0}\right)$$

e per evitare di lavorare con un'espressione trascendente, possiamo sviluppare in Serie di Taylor

$$p_x = p_0 - \rho g x + \frac{1}{2}\frac{(\rho g x)^2}{p_0} - ...$$

e fermarci al secondo ordine e risolvere questa nuova equazione

$$\begin{cases} p_0 = p_x + \rho_e g x - \dfrac{1}{2}\dfrac{(\rho_e g x)^2}{p_0} \\ p_0 = p_x + \rho_i g x - \dfrac{1}{2}\dfrac{(\rho_i g x)^2}{p_0} + \dfrac{1}{2}\rho_i v_x^2 \end{cases}$$

da cui

$$\rho_e g x - \frac{1}{2}\frac{(\rho_e g x)^2}{p_0} = \rho_i g x - \frac{1}{2}\frac{(\rho_i g x)^2}{p_0} + \frac{1}{2}\rho_i v_x^2$$

sostituendo $\rho_i$, semplificando e riarrangiando i termini

$$\frac{1}{2}\frac{\rho_e g^2}{p_0}\left[1 - \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2\right] x^2 - g\left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) x + \frac{1}{2}\frac{T_e}{T_i} v_x^2 = 0$$

che, analogamente a quanto fatto nell'Es.1 possiamo scrivere come

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho_e g^2}{p_0}\left[1 - \left(\dfrac{T_i}{T_e}\right)^2\right] \\ b = -g\left(1 - \dfrac{T_i}{T_e}\right) \\ c = \dfrac{1}{2}\dfrac{T_e}{T_i} v_x^2 \end{cases}$$

con le due soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to x_1 = 9660 \text{ m, e } x_2 = 80.2 \text{ m}$$

La prima è una soluzione "alternativa" ma comunque possibile, mentre la seconda e' la soluzione corretta rispetto a quella trovata con l'approssimazione di Stevino. L'errore commesso è

$$(80.2 - 79.5)/80.2 = 0.82\%$$