Corso di Laurea: Fisica
Esame: Termodinamica e Fluidodinamica (scritto e soluzioni)
7 febbraio 2020

Esercizio n.1

Un sistema composto da 2 moli di gas perfetto inizialmente ad una pressione di 5 atm ed un volume di 10 l, compie il ciclo composto da:
- trasformazione politropica pV^2 fino alla pressione atmosferica, con una variazione di Entalpia di -7000 J;
- trasformazione adiabatica reversibile fino al volume iniziale;
- il ciclo viene chiuso ponendo il sistema in contatto con il serbatoio alla temperatura iniziale.

Calcolare i calori molari del gas, il lavoro totale, il rendimento e l'equivalente rendimento di una macchina di Carnot. Calcolare infine la variazione di entropia dell'universo.

Soluzione

NB: esercizio simile all'Es.1 del 23 settembre 2019 (ma con dati iniziali diversi ed un risultato completamente diverso!).

L'incognita da trovare è sempre c_p, da cui poi si ricava $\gamma = c_p/c_V$. Il sistema iniziale è noto, conoscendo il numero di moli, la pressione ed il volume, si ricava immediatamente la temperatura

$$T_A = p_A V_A/nR = 305 \text{ K}$$

La prima trasformazione è un'espansione politropica di cui conosciamo il coefficiente $\alpha = 2$ e pertanto possiamo determinare il volume finale

$$p_A V_A^\alpha = p_B V_B^\alpha \to V_B = V_B \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{1/\alpha} = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

e la temperatura

$$T_B = p_B V_B/nR = 136 \text{ K}$$

Possiamo a questo punto calcolare c_p che si ricava avendo avuto come input la variazione di Entalpia del sistema durante l'espansione

$$\Delta H = nc_p(T_B - T_A) \to c_p = \frac{\Delta H}{n(T_B - T_A)} = 20.8 \text{ J/mol/K}$$

(che guarda caso è praticamente $2.5R$) ed immediatamente

$$c_V = c_p - R = 12.5 \text{ J/mol/K} \quad \text{da cui si ricava} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1.67$$

pertanto $\gamma < \alpha$ il che significa che la compressione adiabatica risulta meno pendente dell'espansione politropica, e definendo pertanto un ciclo "orario" (e non antiorario com'era il risultato dell'esercizio precedente). Il ciclo è pertanto una macchina e possiamo calcolare anche il rendimento. Calcoliamo il calore scambiato durante l'espansione politropica; per farlo basta calcolare

$$c_\alpha = c_V + \frac{R}{1-\alpha} = 4.15 \text{ J/mol/K}$$

ed utilizzare direttamente la relazione

$$Q_{AB} = nc_\alpha(T_B - T_A) = -1400 \text{ J}$$

La seconda trasformazione è come già detto una compressione adiabatica reversibile fino al volume iniziale, che porta il sistema alla temperatura

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \to T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 233 \text{ K}$$

In questo caso non vi è calore scambiato. Rimane ora da chiudere il ciclo con una trasformazione isocora irreversibile che riporti il sistema la punto di partenza. Il calore scambiato in questo caso è

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = 1790 \text{ J}$$

Il lavoro totale è dato dalla somma dei calori scambiati lungo il ciclo:

$$L = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 387 \text{ J}$$

Il rendimento della macchina vale

$$\eta = L/Q_{CA} = 0.217$$

mentre l'equivalente rendimento della macchina di Carnot è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 0.553$$

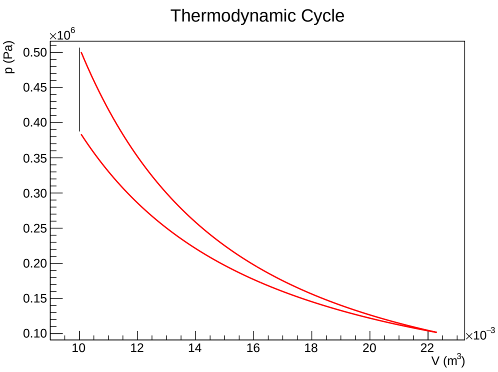

Figura 1: Esercizio 1

Infine resta da calcolare la variazione di Entropia dell'Universo, che si fa per la sola trasformazione isocora irreversibile

$$\begin{aligned} \Delta S_U &= (\Delta S_{CA})_{amb} + (\Delta S_{CA})_{sis} \\ &= \frac{-Q_{CA}}{T_A} + nc_V \ln\frac{T_A}{T_C} = 0.821 \text{ J/K} \end{aligned}$$

Esercizio n.2

In un recipiente dalle pareti adiabatiche contenente un litro d'acqua a temperatura ambiente (20 $°C$) inserisco una certa quantità di ghiaccio (T_g = -10 $°C$) e poi chiudo con un coperchio adiabatico. Qual è la quantità di ghiaccio necessaria per portare il sistema a 4 $°C$? Si apre il coperchio del recipiente e si lascia che l'acqua ivi contenuta si riporti a temperatura ambiente. Calcolare la variazione di entropia dell'Universo dell'intero processo (calore specifico del ghiaccio c_g = 2090 J/kg/K). Si trascuri l'effetto dell'aria contenuta nel recipiente chiuso.

Soluzione

In questo esercizio bisogna porre particolare attenzione alle trasformazioni in gioco. Il ghiaccio assorbe calore Q_g in tre fasi: assorbe calore (calore specifico

del ghiaccio c_g) e si porta da $T_g = -10\ °C$ a $T_0 = 0\ °C$
si scioglie (calore latente di fusione λ_f)
infine, "ex ghiaccio" diventato acqua, assorbe calore (calore specifico dell'acqua c_a) per portarsi alla temperatura finale $T_f = 4\ °C$.

$$Q_g = m_g \left[c_g(T_0 - T_g) + \lambda_f + c_a(T_f - T_0)\right]$$

Il calore Q_a è ceduto dall'acqua, inizialmente a temperatura ambiente $T_a = 20$ $°C$, che diminuirà la propria temperatura fino a raggiungere anch'essa i 4 $°C$.

$$Q_a = m_a c_a(T_f - T_a)$$

Poiché il sistema è isolato dall'ambiente e NON compie lavoro, in base al I PTD deve necessariamente essere

$$Q_g + Q_a = 0$$

L'unica incognita in questa equazione è la massa di ghiaccio (si assume che la massa di un litro d'acqua sia di 1 kg), pertanto

$$m_g = m_a \frac{c_a(T_a - T_f)}{c_g(T_0 - T_g) + \lambda_f + c_a(T_f - T_0)} = 0.181 \text{ kg}$$

La variazione di Entropia dell'Universo deve essere imputata al ghiaccio ed all'ambiente, in quanto l'acqua (il kg iniziale!) era a 20 $°C$ ed alla fine è ritornata essere 20 $°C$. Pertanto possiamo calcolare la variazione di Entropia del ghiaccio (poi acqua) nell'andare da -10 a 20 $°C$e quella dell'ambiente che ha ceduto il calore necessario (anche se in realtà non è andata proprio così, ma sappiamo che l'Entropia è funzione di stato e quindi non importa sapere *come* sono andate le cose). La variazione di entropia del ghiaccio è

$$\Delta S_g = m_g \left[c_g \ln\frac{T_0}{T_g} + \frac{\lambda_f}{T_0} + c_a \ln\frac{T_a}{T_0}\right] = 288 \text{ J/K}$$

mentre quella dell'ambiente è

$$\Delta S_{amb} = \frac{-Q_g - m_g c_a(T_a - T_f)}{T_a} = -270 \text{ J/K}$$

per cui

$$\Delta S_U = \Delta S_g + \Delta S_{amb} = 18 \text{ J/K}$$

Si ottiene lo stesso risultato (oltretutto verificando che in qualunque momento della trasformazione l'Entropia dell'Universo aumenta) calcolando la variazione fino all'equilibrio tra l'acqua e l'ex ghiaccio e successivamente, aperto il recipiente, fino all'equilibrio con l'ambiente.

Esercizio n.3

Un pallone elastico, di materiale leggerissimo, contiene un gas di massa $m = 3.0$ kg e volume iniziale $V_i = 3.3$ m^3 ed è legato a terra da una corda. Si rilascia la corda ed il pallone inizia a sollevarsi in aria gonfiandosi interamente fino al volume massimo possibile ($V_{max} = 11$ m^3). Calcolare:

- la tensione iniziale della corda;
- l'altitudine del pallone nell'istante in cui si è gonfiato interamente;
- la massima altitudine raggiungibile dal pallone.

La pressione e densità iniziali dell'aria sono 1.013×10^5 Pa e 1.27 kg/m^3, e nell'intervallo di altezze considerato la temperatura non varia apprezzabilmente.

Soluzione

NB: esercizio uguale all'Es.3 del 9 settembre 2013 Dalla massa e volume del pallone appeso a terra possiamo ricavare il valore della tensione applicata alla corda in base al principio di Archimede:

$$\vec{T} + \vec{F_p} + \vec{F_A} = \vec{0}$$

da cui immediatamente

$$T = \rho_0 V_i g - mg = 12 \text{ N}$$

con ρ_0 la densità dell'aria al suolo.

La pressione interna del pallone è uguale alla pressione esterna fintantoché il pallone può aumentare il proprio volume. Salendo, la pressione atmosferica diminuisce secondo la legge

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z}$$

da cui

$$z = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p(z)}{p_0}$$

con z l'altezza dal suolo. Ipotizzando l'aria come gas perfetto ed essendo la temperatura costante, risulta $p(z)V(z) = p_0 V_0$ da cui $p(z)/p_0 = V_0/V(z)$, per cui

$$z_{max} = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{V_0}{V_{max}} = 9800 \text{ m}$$

Il pallone continuerà a salire? A questa quota la spinta di Archimede è ancora superiore al peso del pallone (verificate) in quanto la densità del gas all'interno del pallone risulta inferiore a quella dell'aria alla stessa quota. Fosse accaduto il contrario il pallone NON sarebbe arrivato fino a qui! (sarebbe stato un *esercizio trabocchetto*). Pertanto il pallone continua a salire fino a quando la spinta di Archimede non coincide con il peso del pallone stesso, ovvero sino a quando la densità interna del gas nel pallone equivale alla densità esterna dell'aria (abbiamo supposto che l'involucro sia leggerissimo):

$$mg = \rho(z_f) V_{max} g \rightarrow \rho(z_f) = \frac{m}{V_{max}}$$

Conoscendo la densità dell'aria $\rho(z_f)$ alla fine della salita, possiamo ricavare l'altezza massima raggiunta. Per farlo utilizziamo nuovamente l'equazione di stato dei gas perfetti $p(z)V(z) = p_0 V_0$ da cui $p(z_f)/p_0 = \rho(z_f)/\rho_0$, e sostituendo

$$z_f = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{\rho(z_f)}{\rho_0} = 13000 \text{ m}$$

NB: i risultati numerici tengono conto del fatto che alcune grandezze iniziali sono state date con solo due cifre decimali