Prova scritta di "Analisi statistica dei dati sperimentali"
09/07/2003

Problema 1

Uno sperimentatore misura il flusso di particelle emesse da una sorgente radiattiva in direzioni opposte ("in avanti" ed "all'indietro"). Secondo una certa teoria, le particelle dovrebbero in media essere emesse con ugual probabilita' in entrambe le direzioni. Per verificare questa teoria egli prima conta il numero totale di particelle emesse "in avanti" per 10 ore (998 particelle). Esegue poi due misure "all'indietro", una di 6 ore (590 particelle), ed una di 4 ore (405 particelle). Le due misure fatte "all'indietro" sono tra loro compatibili? Sulla base dei dati raccolti, ci sono le condizioni per rigettare la teoria?

Soluzione

La prima considerazione da fare riguarda le due misure "all'indietro". Si dimostra facilmente (propagazione delle incertezze) che i conteggi possono essere sommati per dare un unico valore con incertezza poissoniana data dalla radice quadrata del conteggio totale. L'effettuare la misura in due tempi puo' aiutare a verificare fluttuazioni temporali dei conteggi non dovute alla casualita' della misura, ma a fattori esterni (errore sistematico), quali ad esempio il cambiamento dell'efficienza del contatore nel tempo.

Quindi, detta a la misura di conteggio "in avanti", e i_1 ed i_2 le due misure "all'indietro", si determina il valore totale $i = i_1 + i_2$ di conteggi "all'indietro".

$$a = 998; s_a = \sqrt{a} = 32$$

$$i = 590 + 405 = 995; s_i = \sqrt{i} = 32$$

(come si rappresenta questo valore tenendo correttamente conto delle cifre significative?). Poiche' le due misure a ed i sono state eseguite nello stesso intervallo di tempo (10 ore), possiamo considerare questo tempo come unitario per cui le misure effettuate rappresentano gia' il "flusso" delle particelle.

Dobbiamo ora confrontare il risultato sperimentale con l'ipotesi che le particelle vengano emesse con egual probabilita' nelle due direzioni, ovvero che la differenza di flusso sia nulla. Si calcola quindi la quantita' d ("differenza")

$$d = a - i = 3; s_d = \sqrt{(s_a)^2 + (s_i)^2} = \sqrt{a + i} = 45$$

e la si confronta con il valore teorico 0.

$$t_d = \frac{|d - 0|}{s_d} = \frac{3}{45} = 0.07$$

Poiche' si deve trovare lo scostamento assoluto tra le due misure, si usa il livello di confidenza (CL) a due code.

$$P|t_d| \geq 0.07 = 1 - P|t_d| < 0.07 = 1 - 0.05581 = 0.94$$

non si puo' certamente rigettare l'ipotesi che le particelle vengano emesse con egual probabilita' nelle due direzioni!

Problema 2

Lo studente misura un tempo t (s) otto volte con i seguenti risultati

Valore, t_k	75	76	77	78	79	80
Occorrenza, n_k	2	3	0	0	2	1

a) Determinare il valore medio e la deviazione standard della distribuzione.
b) Sulla base del risultato determinare la probabilita' che una successiva misura possa dare come risultato il valore 81 o superiore.
c) Verificare se vi sono misure sospette.

Soluzione

a) il valore medio e la varianza sperimentale sono rispettivamente

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_k n_k \times t_k = 77.0$$

$$s_t^2 = \frac{1}{N-1} \sum_k n_k \times (t_k - \bar{t})^2 = 1.9$$

Detta $2\Delta_t = 1s$ la differenza minima tra due misure, l'incertezza strumentale e' $\Delta_t = 0.5s$. L'incertezza strumentale puo' essere vista come una incertezza di tipo statistico con distribuzione uniforme, con deviazione standard $\Delta_t/\sqrt{3}$ che, sommata quadraticamente all'incertezza statistica della grandezza, da' come risultato la varianza sperimentale misurata. Pertanto

$$s^2 = s_t^2 - \frac{\Delta_t^2}{3} = 1.9$$

b) Assumiamo che i dati siano distribuiti gaussianamente. Poiche' le misure sono arrotondate all'intero, e noi abbiamo trasformato la distribuzione discreta in una densita' di probabilita' gaussiana del tipo

$$G(t; \bar{t}, s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\bar{t})^2/2s^2}$$

dobbiamo calcolare la probabilita' che il valore sia superiore ad 80.5 anziche' 81

$$P_G(t > 80.5) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{80.5}^{\infty} G(t; \bar{t}, s)\, dt$$

Anziche' calcolare questo integrale, passiamo alla "gaussiana standard"

$$N(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \; ; \; z = \frac{|t - \bar{t}|}{s}$$

t = 80.5 → z = 1.84, e dalle tabelle

$$P_N(z > 1.84) = (1 - P_N(|z| < 1.84))/2 = 0.03$$

c) La verifica di misure sospette viene fatta utilizzando il Criterio di Chauvenet. Si considera il valore piu' lontano dal valore medio delle misure, che nel nostro caso e' $t_k = 80$, e verifico il valore di t corrispondente alla "gaussiana standard"

$$z = \frac{t_{susp} - \bar{t}}{s} = \frac{80 - 77}{1.9} = 1.58$$

$$n(peggiori\ di\ t_{susp}) = N(1 - P(entro\ z)) = 8(1 - 0.88) = 0.96 > 1/2$$

Quindi il valore $t_k = 80$ non va rigettato.

Problema 3

La densita' di probabilita' di due variabili x, y e'

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/k & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Determinare il coefficiente di normalizzazione k.
b) Si calcolino inoltre le distribuzioni marginali $M(x)$, $M(y)$, la distribuzione cumulativa $C(x,y)$, ed i valori di aspettazione $E[x], E[y], E[xy]$.
c) Rappresentare graficamente $f(x,y)$, $M(x)$ ed $M(y)$

Soluzione

a) Il coefficiente di normalizzazione si ottiene da

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\frac{1}{k}\int_0^1\int_0^2 xy\,dx\,dy = \frac{1}{k}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{k}[0.5-0][2-0] = \frac{1}{k} = 1 \rightarrow k = 1$$

b) Le distribuzioni marginali $M(x)$ ed $M(y)$ sono definite rispettivamente negli intervalli $0 \leq x \leq 1$ ed $0 \leq y \leq 2$ dove hanno i seguenti valori

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^2 xy\,dy = x\left[y^2/2\right]_0^2 = 2x$$

$$M(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 xy\,dx = y\left[x^2/2\right]_0^1 = y/2$$

e la distribuzione cumulativa (nell'intervallo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$)

$$C(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^x x\,dx\int_0^y y\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y = \frac{x^2y^2}{4}$$

ovvero

$$C(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0, y<0 \\ x^2y^2/4 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & x>1, x>2 \end{cases}$$

I valori di aspettazione sono dati da

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 x^2\,dx\int_0^2 y\,dy = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 2/3$$

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx\int_0^2 y^2\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 4/3$$

$$E[xy] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 x^2\,dx\int_0^2 y^2\,dy = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 8/9$$

c) ...