Compito di “Analisi statistica dei dati sperimentali”
3 aprile 2006

Problema 1

Il numero medio di eventi di un contatore di particelle e' $\mu = 30.0$ al giorno. Si calcolino:
a) la probabilita' $P(18 \leq k \leq 34)$ di eventi in un giorno
b) la probabilita' $P(2 \leq k < 5)$ di eventi in un ora
c) la probabilita' $P(K = 35)$ eventi in un giorno
Si discutano i risultati e le approssimazioni fatte. Si valutino correttamente le cifre significative.

Soluzione

a) In questo esercizio dobbiamo utilizzare un'approssimazione della distribuzione di Poisson, valida quando $n >> 1$, ovvero la densita' di probabilita' di Gauss

$$P_P(18 \leq k \leq 34; \mu) \rightarrow P_G(17.5 \leq x \leq 34.5; \mu, \sigma) \ , \ \sigma = \sqrt{\mu}$$
$$\sum_{k=18}^{34} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{17.5}^{34.5} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

Per il calcolo dell'integrale della distribuzione di Gauss, dobbiamo operare la trasformazione di coordinate, e dobbiamo poi ricorrere all'uso delle tabelle dell'integrale della densita' di probabilita' Standard $N(t; 0, 1)$ con $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$P_G \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2.28}^{0.82} e^{-t^2/2} dt = 0.4887 + 0.2939 = 0.78$$

b) In questo caso dobbiamo prima trovare il numero medio di eventi in un'ora. $\mu_h = \mu/24 = 1.25$. In questo caso conviene fare il calcolo esatto

$$P_P(2 \leq k < 5; \mu_h) = P_P(2; 1.25) + P_P(3; 1.25) + P_P(4; 1.25) = 0.224 + 0.093 + 0.029 = 0.346$$

Se utilizziamo la stessa approssimazione del caso precedente, trasformando l'intervallo $1.50 \leq x \leq 4.50$ in $0.224 \leq t \leq 2.907$ troviamo

$$P_G \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.22}^{2.91} e^{-t^2/2} dt = 0.49819 - 0.08706 = 0.41113 \rightarrow 0.41$$

La differenza percentuale tra i due risultati e' $d(\%) = 100 \times |0.346 - 0.41|/0.346 = 19\%$, che e' di gran lunga superiore all'indeterminazione con cui si sono ottenuti i risultati.
c) In questo caso possiamo fare il calcolo esatto con Poisson e poi il calcolo approssimato. Nel primo caso otteniamo il valore

$$P_P(k; \mu) = P_P(35; 30) = \frac{30^{35}}{35!} \mu^{-30} = 0.0453$$

mentre nel secondo caso otteniamo, mediante il solito procedimento $P_G(34.5 \leq x \leq 35.5) = 0.047$, ed una differenza percentuale $d(\%) = 100 \times |0.0453 - 0.047|/0.0453 = 3\%$, dell'ordine dell'incertezza delle misure.

Problema 2

Si consideri la seguente espressione:

$$S = \frac{l^2 t}{\pi r^3}$$

a) Calcolare il valore di S e la deviazione standard, in base ai risultati delle misure delle grandezze dirette.

$$l = 3.68923(4) \cdot 10^4 m, \; t = 1.23456(2) \cdot 10^2 s, \; r = 4.79623(12) \cdot 10^1 m$$

(la deviazione standard delle singole misure e' tra parentesi)
b) Come come nel caso precedente, calcolare l'errore massimo di S
c) Che valore numerico di π si deve utilizzare nei due casi?

Soluzione

a) b) c)

Problema 3

Due gruppi di studenti eseguono entrambi 10 misure di una stessa grandezza e trovano i seguenti valori medi con le relative incertezze:

$$\begin{aligned} x_A &= 72 \pm 8 \quad (CL\ 68\%) \\ x_B &= 78 \pm 5 \quad (CL\ 68\%) \end{aligned}$$

a) Verificate che le misure sono confrontabili e poi calcolate la media pesata di queste misure.
b) Una teoria prevede per questa grandezza il valore $x_{th} = 60 \pm 2$ $(CL\ 68\%)$. Ci sono le condizioni per rigettare l'ipotesi?
c) Quante misure dovrebbe fare il primo gruppo di studenti per avere un risultato con lo stesso peso del secondo gruppo?

Soluzione

a) b) c)