

Appunti

Applicazioni dei teoremi di additivita' e del prodotto di probabilita': efficienza

Un'utile applicazione riguarda il concetto di "efficienza" di un rivelatore di particelle. Sia n_i il numero di particelle che attraversano il rivelatore R_i , ed n_{R_i} il numero di particelle rivelate; si intende con "efficienza" di rivelazione il rapporto

$$\epsilon_i = P(R_i) = \frac{n_{R_i}}{n_i}$$

Per come e' definita, l'efficienza e' una probabilita' che segue tutte le leggi fin qui viste. In particolare, valgono i teoremi di additivita'

$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)$$

e del prodotto

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1|R_2)P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1)$$

noi useremo d'ora in poi la notazione " $R_1 + R_2$ " al posto di " $R_1 \cup R_2$ ", e " $R_1 R_2$ " al posto di " $R_1 \cap R_2$ ".

In molti esperimenti di fisica capita di dover contare il numero di particelle che attraversano una superficie definita, in un intervallo di tempo definito (si pensi al caso in cui l'oggetto sia il corpo umano e le particelle siano i *raggi x*). La quantita' che si vuole misurare va sotto il nome di "flusso". Per farlo e' spesso necessario definire una "coincidenza temporale", ovvero costruire un apparato con almeno due rivelatori che contemporaneamente registrino il passaggio delle particelle.

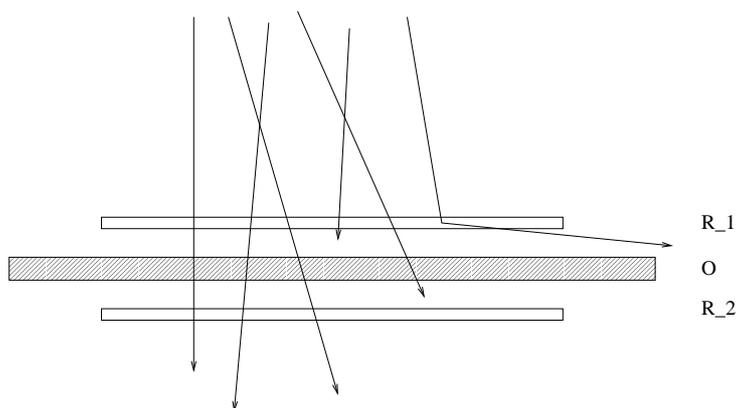


Figura 1: I caso: due rivelatori

Supponiamo di voler determinare il flusso di particelle (indicate dalle frecce) che attraversano l'oggetto O in fig. 1. Per avere la certezza che la particella abbia effettivamente attraversato l'oggetto, dobbiamo assemblare il nostro apparato come in figura, cioe' con un rivelatore R_1 "prima" ed uno

R_2 “dopo” (il prima ed il dopo sono relativi alla direzione del fascio di particelle). Tale necessita' e' intuitivamente spiegata nel disegno; in pratica le particelle potrebbero fermarsi o deviare dopo R_1 e prima di O . Vi sono altre motivazioni, legate al comportamento di alcuni rivelatori, che hanno la caratteristica di dare un segnale di passaggio di particella senza che in realta' questo sia accaduto (rumore di rivelatore). In questo caso, dovendo richiedere la coincidenza dei due rivelatori ci troviamo nelle condizioni di eventi indipendenti (i due rivelatori lavorano indipendentemente) e compatibili (e' possibile che una particella attraversi entrambi i rivelatori). Questo significa che l'efficienza totale di conteggio del flusso e'

$$\epsilon_{tot} = P(R_1 R_2) = P(R_1)P(R_2) = \epsilon_1 \epsilon_2$$

E' evidente che l'efficienza totale, essendo le singole efficienze ≤ 1 , peggiorera'. Supponiamo ad esempio che i rivelatori abbiano tutti la stessa efficienza ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon = 0.80$). L'efficienza totale risulta pertanto essere $\epsilon_{tot} = \epsilon^2 = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64$.

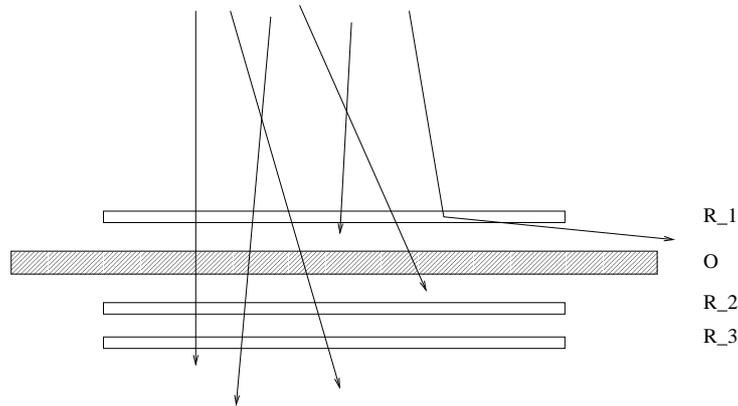


Figura 2: Il caso: tre rivelatori

Come possiamo migliorare questa bassa efficienza? Possiamo aggiungere un rivelatore dopo l'oggetto, come mostrato in fig. 2, e richiedere la coincidenza tra il rivelatore R_1 ed uno dei due rivelatori R_2 o R_3 . In questo caso il calcolo dell'efficienza e'

$$\begin{aligned} \epsilon_{tot} &= P(R_1)P(R_2 + R_3) \\ &= P(R_1)(P(R_2) + P(R_3) - P(R_2)P(R_3)) \\ &= \epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3) \\ &= \epsilon(1 - (1 - \epsilon)^2) \\ \epsilon_{tot} &= 0.8 \cdot (1 - (1 - 0.8)^2) = 0.77 \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un metodo per migliorare l'efficienza del nostro sistema di rivelazione. Possiamo migliorarla ulteriormente applicando due rivelatori

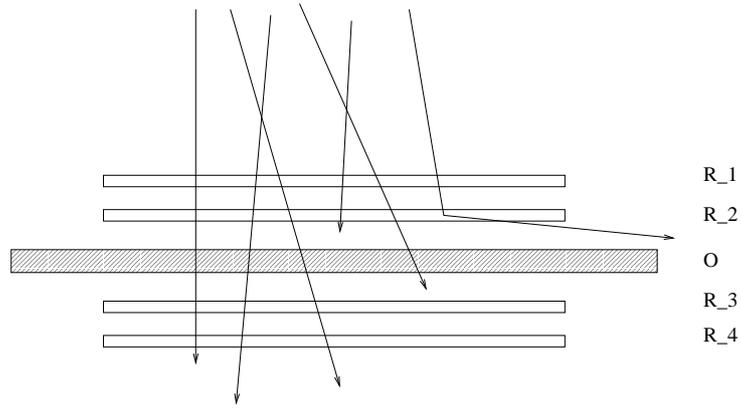


Figura 3: III caso: quattro rivelatori

anche sopra l'oggetto O (vedi fig. 3).

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{tot} &= P(R_1 + R_2)P(R_3 + R_4) \\
 &= (P(R_1) + P(R_2) - P(R_1)P(R_2))(P(R_3) + P(R_4) - P(R_3)P(R_4)) \\
 &= (\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1\epsilon_2)(\epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_3\epsilon_4) \\
 &= (1 - (1 - \epsilon)^2)^2 \\
 \epsilon_{tot} &= (1 - (1 - 0.8)^2)^2 = 0.92
 \end{aligned}$$

Ricapitolando, siamo passati da un'efficienza del 64% con due rivelatori, al 77% ed al 92% con tre e quattro rivelatori rispettivamente, con un aumento di efficienza del 20% e del 44%.