Appunti

Confronto tra ipotesi e risultato sperimentale

Nel confrontare un risultato sperimentale con una certa ipotesi di descrizione della popolazione possiamo trovarci di fronte a tre possibili casi

1. confronto tra una singola misura effettuata ed un'ipotesi di distribuzione aleatoria,
2. confronto tra una distribuzione sperimentale ed un'ipotesi numerica,
3. confronto tra una distribuzione sperimentale ed una ipotesi di distribuzione aleatoria.

Prima di andare ad analizzare nel dettaglio i tre casi, dobbiamo fare alcune precisazioni. Le distribuzioni aleatorie non sono necessariamente delle probabilita'. In alcuni casi il confronto dei risultati sperimentali viene fatto con un'ipotesi di distribuzione o densita' di probabilita', ma vedremo come il confronto potra' essere fatto con ipotesi del tutto generali. Il primo ed il secondo caso sono speculari, si tratta sempre del confronto tra una distribuzione ed un valore, mentre nel terzo caso il confronto e' tra due distribuzioni.

Definiamo a questo punto un concetto nuovo, che e' il *livello di significativita'* per il rigetto di un'ipotesi. Si stabilisce di **rigettare** un'ipotesi quando questa ha una probabilita' di verificarsi inferiore ad un determinato valore (Si parla in questo caso di ipotesi *nulla*). In particolare un'ipotesi viene rigettata con un livello significativo del 95%, oppure viene rigettata con un livello *altamente* significativo del 99% quando la probabilita' di accadere e' rispettivamente inferiore al 5% o all'1%. Nel caso contrario si dice che non vi sono ragioni per rigettare l'ipotesi.

I caso

Prendiamo in considerazione l'esercizio 3.13 del Cap. 3.11 del testo di riferimento. In esso si effettua una misura di 1000 lanci di una moneta in cui si ottengono 450 volte *testa*. Vogliamo confrontare questo risultato con l'ipotesi che la moneta non sia truccata. Pertanto la nostra ipotesi e' una binomiale con $p = 1/2$ che accada *testa*. In questo caso la distribuzione aleatoria da' come risultato

$$\mu = np = 1000 \times 0.50 = 500 \quad ; \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 15.8$$

Il risultato della nostra singola misura, invece, si discosta dal valore centrale di una certa quantita'. Poiche' $n = 1000$ e' un mumero elevato, possiamo approssimare la nostra distribuzione binomiale con una equivalente densita' di probabilita' di gauss con i valori di μ e σ calcolati per la binomiale. Possiamo a questo punto valutare la probabilita' che nell'ipotesi di moneta *onesta* si ottenga un numero ≤ 450. Per fare questo trovo il valore corrispondente di 450 per una gaussiana standard

$$t = \frac{450 - 500}{15.8} = -3.16$$

e calcolo la probabilita'

$$P(t \leq -3.16) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-3.16} e^{t^2/2}\ dt = 8 \cdot 10^{-4}$$

In questo caso dobbiamo rigettare l'ipotesi che la moneta sia onesta. Nel caso in esame si parla di *test ad una coda* in quanto il calcolo della probabilita' riguarda l'area di una delle due code dell'ipotesi gaussiana (fig. 1).

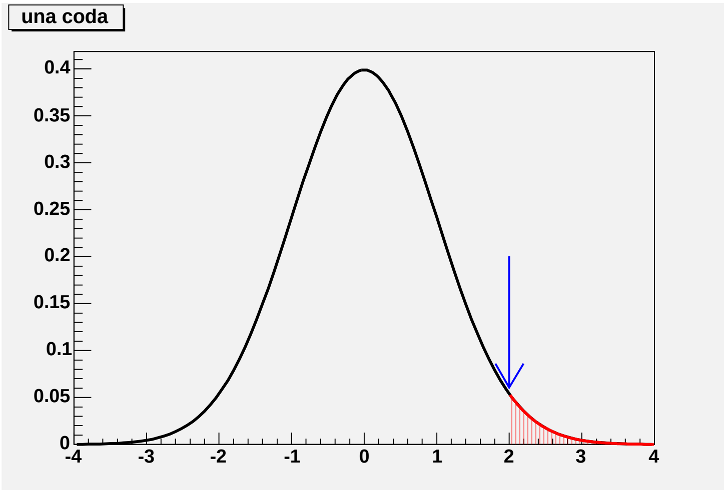

Figura 1: I caso: Ipotesi *nulla* ad una coda

II caso

Una sperimentatrice desidera verificare la conservazione dell'energia in una reazione nucleare, e misura l'energia iniziale e finale del sistema con la relativa incertezza di tipo gaussiano. I risultati numerici trovati, in una particolare unita' di misura dell'energia (MeV) sono i seguenti

$$E_i = 75 \pm 3 \quad ed \quad E_f = 60 \pm 9$$

Dovra' confrontare questa discrepanza con l'ipotesi nulla che l'energia si conservi.

Per fare questo si calcola la differenza tra l'energia iniziale e finale con la relativa incertezza

$$\Delta E = |E_i - E_f| = 15 \quad ; \quad \sigma = \sqrt{3^2 + 9^2} = 9$$

e si confronta questo risultato con l'ipotesi nulla che la differenza di energia tra prima e dopo la misura sia uguale a 0.

$$t = \frac{15 - 0}{9} = 1.7$$

e calcolo la probabilita'

$$P(|t| \geq 1.7) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.7}^{1.7} e^{t^2/2}\ dt = 0.09$$

Il risultato ottenuto non ci permette di rigettare l'ipotesi che l'energia si conservi. In questo caso abbiamo utilizzato il test a due code perche' nel fare il calcolo abbiamo calcolato il valore assoluto della differenza di energia; sarebbe stato infatti assolutamente indifferente valutare la differenza tra l'energia finale e quella iniziale, e quindi prendere in considerazione l'altra parte della distribuzione sperimentale (fig. 2).

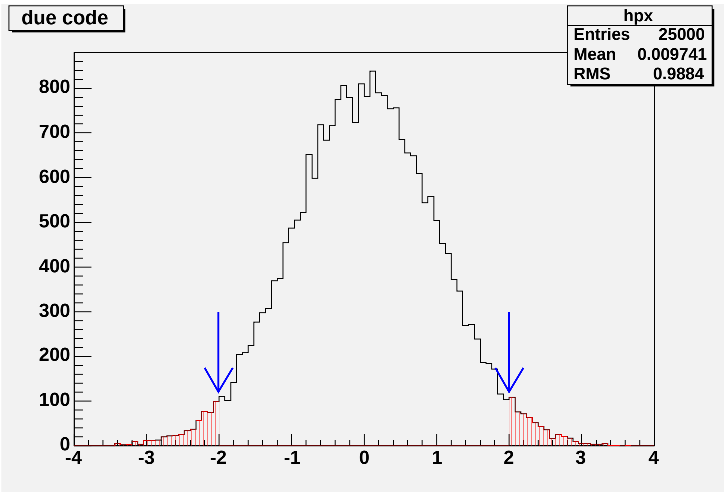

Figura 2: I caso: Ipotesi *nulla* a due code

III caso

In quest'ultimo caso vengono confrontate la *forma* della distribuzione sperimentale ed una ipotesi di distribuzione che descrive la grandezza misurata. Perche' il confronto sia significativo, le due distribuzioni devono avere la stessa area nell'intervallo considerato. La distribuzione puo' essere una probabilita', o eventualmente una densita' di probabilita', ma non necessariamente. Anche in questo caso dovremo trovare un metodo per poter eventualmente rigettare l'ipotesi.

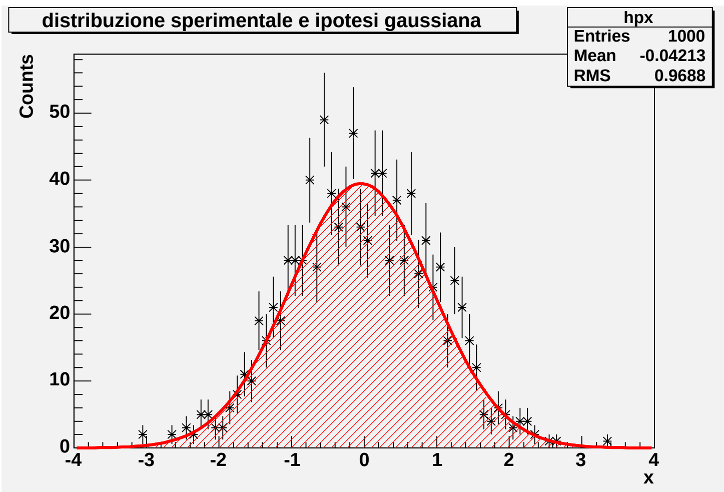

Figura 3: III caso: Confronto tra distribuzione sperimentale e distribuzione aleatoria

Consideriamo l'istogramma di fig. 3 in cui sono stati raccolti i dati di N misure della grandezza x. I dati sono stati istogrammati raccogliendoli in intervalli di larghezza δx (costante). Detto $x_j (j = 1, 2, ..., m)$ il valore centrale del j-esimo intervallo, sia n_j la frequenza di conteggi con il valore $x_j - \delta x/2 \leq x \leq x_j + \delta x/2$. Vogliamo confrontare il nostro istogramma cosi' costruito, con l'ipotesi che i dati seguano l'andamento della curva descritta dalla funzione $f(x)$, il cui integrale nell'intervallo considerato e' stato normalizzato a N. Per ogni intervallo confrontiamo le probabilita' sperimentali $p_j = n_j/N$ con la probabilita' aleatoria

$$P(x_j) = F(x_j)/N = frac1N \int_{x_j-\delta x/2}^{x_j+\delta x/2} f(x)\,dx$$

Notiamo subito che per noi e' piu' comodo confrontare n_j con $F(x_j)$ al posto di p_j con $P(x_j)$ (non dobbiamo preoccuparci di dividere sempre tutto per N). I singoli valori n_j misurati hanno un'incertezza di tipo statistico poissoniano con $\sigma_j^2 = n_j$ a meno che il numero totale di misure N non sia un valore predefinito, nel qual caso gli n_j seguono una distribuzione binomiale con

$$\sigma_j^2 = n_j p_j (1 - p_j) = n_j \frac{n_j}{N}(1 - \frac{n_j}{N}) = (\frac{n_j}{N})^2 (N - n_j)$$

Nel caso generale in cui N non e' un valore predefinito (e assumendo che $n_j \geq 10$) possiamo pensare che il conteggio n_j sia distribuito gaussianamente attorno al valore $nP(x_j)$ dell'ipotesi. Allora la probabilita' di ottenere gli n_j misurati e' data dal prodotto delle m probabilita'

$$P(n_1, n_2, ..., n_m) = P(n_1)P(n_2) \cdots P(n_m) = \prod_{j=1}^{m} P(n_j)$$

con

$$P(n_j) = \frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}} e^{-(n_j - NP(x_j))^2/2\sigma_j^2} \delta x$$

e quindi la probabilita' totale e' data da

$$P(n_1, n_2, ..., n_m) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_j\sqrt{2\pi}} e^{-(n_j - F(x_j))^2/2\sigma_j^2} (\delta x)^m \propto e^{-\chi_0^2/2}$$

con

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j - F(x_j))^2}{\sigma_j^2}$$

La quantita' ora definita ha delle proprieta' importanti. Innanzitutto si puo' valutare la densita' di probabilita' $F(\chi^2)$ (descritta in dettaglio nel Cap.3.9 del testo consigliato). Possiamo quindi operare come fatto nei precedenti casi: si calcola il χ_0^2 dell'ipotesi e si valuta l'integrale della densita' di probabilita' di ottenere un χ^2 superiore a quello calcolato

$$P(\chi^2 \geq \chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^{\infty} F(\chi^2)\,d\chi^2$$

Se questa quantita' e' *sufficientemente* piccola, si rigetta l'ipotesi, in quanto i dati non si distribuiscono gaussianamente attorno ai valori dell'ipotesi. In caso contrario non si rigetta l'ipotesi.